8. Gleichungen und Ungleichungen

Beispiel:

(1) Gesucht ist eine reelle Zahl x derart, dass $3x-5=7$ gilt.

Wir formen um: $3x-5=7$

$\Leftrightarrow 3x=12 \quad \Leftrightarrow x=4$

(2) Suche Lösungen der Gleichung $x^2-3=6$

Es gilt $x^2-3=6 \Leftrightarrow x^2=9$

$\Leftarrow x=3$ (Wenn $x=3$, dann ist $x^2=9$, aber nicht gilt es umgekehrt.)

So ist es logisch korrekt $x^2-3=6 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=3 \vee x=-3$

Unsere Gleichung hat also zwei verschiedene Lösungen.

(3) Bestimme die Lösungen von: $|x^3-10x|=6x$

1. Fall: $x^3-10x \geq 0$

Dann ist $x^3-10x=6x \Leftrightarrow x^3=16x \Leftrightarrow x^2=16 \vee x=0$

$\Leftrightarrow x=4 \vee \cancel{x=-4} \vee x=0$

↳ Erfüllt nicht die Bedingung des 1. Falles.

2. Fall: $x^3-10x<0$

Es gilt: $-x^3+10x=6x \Leftrightarrow -x^3=-4x \Leftrightarrow \cancel{x=0} \vee x=2 \vee \cancel{x=-2}$

Wir haben insgesamt 3 Lösungen unserer Gleichung gefunden.

Es gilt $|x^3-10x|=6x \Leftrightarrow x=0 \vee x=2 \vee x=4 \Leftrightarrow x \in \underbrace{\{0,2,4\}}_{\text{Lösungsmenge}}$

(4) Suche die Lösungen $x \in \mathbb{R}$, dass $\frac{2-3x}{4x+5} \geq 2$ gilt.

1. Fall: $4x+5>0 \quad (\Leftrightarrow x>-\frac{5}{4})$ ← nur in diesem Fall

$\frac{2-3x}{4x+5} \geq 2 \Leftrightarrow 2-3x \geq 8x+10 \Leftrightarrow -11x \geq 8 \Leftrightarrow x \leq -\frac{8}{11}$

2. Fall: $4x+5<0 \; (\Leftrightarrow x<-\frac{5}{4})$: ← unmöglich

$\frac{2-3x}{4x+5} \geq 2 \Leftrightarrow 2-3x \leq 8x+10 \Leftrightarrow x \geq -\frac{8}{11}$

Insgesamt: Die Lösungsmenge ist das Intervall $(-\frac{5}{4}; -\frac{8}{11}]$

(5) $|x-5| \leq 2 \Leftrightarrow (x-5 \leq 2 \wedge x \geq 5) \vee (5-x \geq 2 \wedge x < 5)$

$\Leftrightarrow (x \leq 7 \wedge x \geq 5) \vee (x \geq 3 \wedge x < 5)$

$\Leftrightarrow x \in [5,7] \cup [3,5[\Leftrightarrow x \in [3,7]$

Die Lösungsmenge ist das Intervall $[3,7]$

Gleichungen und Ungleichungen in $\mathbb{C}$

Für $z, w \in \mathbb{C}$ ist „$z \leq w$" nicht sinnvoll erklärt! Aber man kann ihre Beträge und Real- und Imaginärteil vergleichen.

Beispiele:

(1) Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 1\}$ ← Lösungsmenge der Gleichung $\operatorname{Re} z = 1$

(2) Gesucht ist die Lösungsmenge der Gleichung $|z| = 1$ in $\mathbb{C}$

(3) Gesucht: Lösungsmenge der Gleichung $|z| < 1$ in $\mathbb{C}$

Lineare Gleichungssysteme (in $\mathbb{R}$)

Gesucht sind $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, die zugleich die folgenden Gleichungen lösen:

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_n + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

mit gegebenen $n, m \in \mathbb{N}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_m \in \mathbb{R}$

Beispiel:

$$3x_1 + 2x_2 = 9$$
$$4x_1 - x_2 = 1$$

Man bezeichnet $(*)$ ~~man~~ als ein lineares Gleichungssystem (über $\mathbb{R}$) mit m Gleichungen in n Unbekannten.

Beispiele:

Anmerkung: In den Fällen $n=2$ bzw. $n=3$ ist es häufig bequemer, statt x_1, x_2, x_3 einfach x, y, z zu schreiben.

(1) $\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 9 \\ 4x - y &= 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow y = 4x - 1$

$\Leftrightarrow 3x + 2(4x-1) = 9 \Rightarrow x = 1$

$y = 4x - 1 = 4 \cdot 1 - 1 = 3$

Wir können die Lösung $x=1$, $y=3$ auch als Element von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auffassen.

Lösungsmenge ist $\{(1|3)\}$

Wir können das Gleichungssystem auch als „eine Gleichung in $\mathbb{R}^2$" betrachten.

(2) $x+y=1$ $\quad (m=1, n=2)$

Lösungsmenge: $\{(\lambda, 1-\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

(3) $\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ 2x+2y=5 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 1-x \Rightarrow 2x+2(1-x)=5 \Rightarrow 2=5$ ↯

Lösungsmenge: $\emptyset$

Bemerkung: Man kann zeigen, dass ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ (auch über $\mathbb{C}$) entweder keine oder genau eine oder unendlich viele Lösungen besitzt.

9. Folgen und Reihen

Beispiel: Betrachte die Zahlenfolge: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

Was ist gemeint?

besser:

Benenne die Folgenglieder mit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und gib an, wie man a_n bestimmt.

Hier: $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

Weitere Beispiele:
- $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \ldots$
- $a_n = (-1)^n \rightarrow -1, 1, -1, 1, \ldots$

Schreibweise: Man kann auch $a(n)$ statt a_n schreiben.

Eine Folge von reellen Zahlen ist also nichts anderes als eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Gebräuchlich ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder kurz $(a_n)_n$

Weitere Beispiele:

(1) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n \rightarrow 3, 6, 12, 24, 48, 96, \ldots$ (Rekursion)

↳ rekursiv erklärte Folge, d.h. das erste Folgenglied ist angegeben und dazu eine Vorschrift, wie man das $(n+1)$-te Folgenglied aus dem n-ten berechnet.

(2) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

$\to 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$

die sogenannte „Fibonacci-Zahlen"

Man kann zeigen, dass hier $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

gilt.

Zurück zu $a_n = \frac{1}{n}$:

„Mit wachsenden n nähern wir uns der 0 immer weiter an."

Genauer: Wenn ε eine beliebige positive Zahl ist, dann finden wir ein $a_n < \varepsilon$ und auch alle weiteren Folgenglieder sind $< \varepsilon$

ähnliche Überlegung: $a_n = \frac{2n+3}{3n-1} \to \frac{5}{2}, \frac{7}{5}, \frac{9}{8}, \frac{11}{11}, \frac{13}{14}, \frac{15}{17}, \dots$

hier gilt: $a_n > 0$ und $a_{n+1} < a_n$ für alle n

$\downarrow$

Man sagt, die Folge ist streng monoton fallend.

Sei $a = \frac{2}{3}$. Betrachte den Abstand $|a_n - a|$

$$|a_n - a| = \left|\frac{2n+3}{3n-1} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{(2n+3)\cdot 3 - 2\cdot(3n-1)}{(3n-1)\cdot 3}\right| = \left|\frac{11}{9n-3}\right|$$

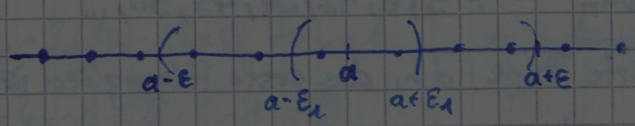
$$\left|\frac{11}{9n-3}\right| \underset{3 \leq 3n}{\leq} \left|\frac{11}{6n}\right|$$

„Wenn n wächst wird der Abstand $|a_n - \frac{2}{3}|$ immer kleiner."

Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$

Man sagt die Folge konvergiert gegen a

$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$



Wählt man irgendein offenes Intervall um den Punkt a, dann liegen nur endlich viele Folgenglieder außerhalb dieses Intervalls.

$a_n \to a \quad (n \to \infty)$

oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$