7. Abzählbarkeit

- Vorüberlegung: „Hilberts Hotel"

In diesem Hotel gibt es unendlich viele Zimmer, genauer
- jede Zimmernummer ist eine natürliche Zahl
- zu jeder natürlichen Zahl gibt es genau ein Zimmer mit dieser Nummer.

Problemstellung 1:

Das Hotel ist voll belegt. Ein weiterer Gast kommt.

↳ Der Gast aus Zimmer 1 zieht um in Zimmer 2.

Der Gast aus Zimmer 2 zieht um in Zimmer 3.

Der Gast aus Zimmer n zieht um in Zimmer $n+1$.

⇒ Der neu angekommene Gast zieht in das nun freie Zimmer 1 ein.

Problemstellung 2: Das Hotel ist voll belegt.

Es kommen genau so viele Gäste, wie schon da sind.

→ Der Gast aus Zimmer n zieht um in Zimmer $2n$

Jetzt sind alle Zimmer mit ungerader Nummer frei.

- Frage: Was ist „unendlich"? Symbol: ∞

Gilt $\infty + 1 = \infty$, $2\infty = \infty$

Gibt es Mengen, die mehr Elemente enthalten als die Menge der natürlichen Zahlen?

Schreibweise

Sei A eine Menge. Wir bezeichnen die Anzahl der Elemente von A mit $|A|$.

Falls A endlich viele Elemente enthält, ist dies kein Problem.

Aber was ist $|\mathbb{N}|$? Gilt $|\mathbb{N}|+1 = |\mathbb{N}|$?

Gilt auch $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$? Oder gar $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$

Definition: Eine Menge A heißt abzählbar unendlich, wenn eine bijektive Abbildung $A \to \mathbb{N}$ existiert.
Man schreibt $|A| = |\mathbb{N}|$.

Beispiele:

(1) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich

$\mathbb{Z}$	0	1	-1	2	-2	3	-3	…
$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	

Eine bijektive Abbildung $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ ist etwa

$$f(n) = 2n \quad \text{falls } n > 0$$

$$f(n) = -2n + 1 \quad \text{falls } n \leq 0$$

(2) Die Menge der geraden natürlichen Zahlen ist abzählbar unendlich.

Sei A eine abzählbar unendliche Menge und $f: A \to \mathbb{N}$ bijektiv.
Dann können wir die Elemente von A nummerieren. (abzählen ≙ nummerieren)
Setzt man $a_n := f^{-1}(n)$ für $n \in \mathbb{N}$, so gilt $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

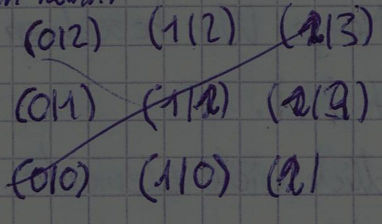
Anmerkung: Es gibt viele verschiedenen bijektive Abbildungen $A \to \mathbb{N}$.
Welches Element von A wir dann als a_n bezeichnen, hängt von der speziellen Wahl der Abbildung ab.

Definition: Eine Menge A heißt abzählbar, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist.

Satz: Sei A eine abzählbare Menge und $B \subseteq A$, dann ist B ebenfalls abzählbar.

Beweis: Übung

Beispiel: Die Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(n,m) \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$ ist abzählbar unendlich.
Folgende Skizze macht deutlich, wie ~~man~~ eine bijektive Abbildung $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ konstruiert werden kann.



Reinschrift

(−1|3)	(0|3)	(1|3)	(2|3)
(−1|2) 16	(0|2) 15	(1|2) 14	(2|2) 13
(−1|1) 5	(0|1) 4	(1|1) 3	(2|1) 12
(−1|0) 6	(0|0) 1	(1|0) 2	(2|0) 11
(−1|−1) 7	(0|−1) 8	(1|−1) 9	(2|−1) 10
(−1|−2)	(0|−2)	(1|−2)	(2|−2)
(−1|−3)	(0|−3)	(1|−3)	(2|−3)

Auch $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Reinschrift

Nenner

$\cancel{-3/3}$	$-2/3$	$-1/3$		$1/3$	$2/3$	$\cancel{3/3}$	$4/3$	$5/3$
$-3/2$	$\cancel{-2/2}$	$-1/2$		$1/2$	$\cancel{2/2}$	$3/2$	$4/2$	$5/2$
$-3/1$	$-2/1$	$-1/1$	0	$1/1$ ①	$2/1$ ②	$3/1$ ③	$4/1$	$5/1$

Zähler

Abzählung von „innen" nach „außen", nicht gekürzte Brüche werden gestrichen.

Satz: Die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen ist abzählbar.

Beweis: Übungen

Satz: $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Beweis: Es genügt eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ zu finden, die nicht abzählbar ist. (weil Teilmengen abzählbarer Mengen immer abzählbar sind.)

Angenommen, das Intervall $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ ist abzählbar. Dann gäbe es eine Abzählung $(0,1) = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

Wir schreiben jedes solche a_n in seiner Dezimalbruchentwicklung und bezeichnen dessen k-te Stelle mit c_{nk}, also

$$\begin{aligned}
a_1 &= 0{,}c_{11}\,c_{12}\,c_{13}\,c_{14}\dots\\
a_2 &= 0{,}c_{21}\,c_{22}\,c_{23}\,c_{24}\dots\\
a_3 &= 0{,}c_{31}\,c_{32}\,c_{33}\,c_{34}\dots\\
a_4 &= 0{,}c_{41}\,c_{42}\,c_{43}\,c_{44}\dots\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Betrachte die Diagonale. Wir können eine Zahl

$$a^* = 0{,}c_{*1}\,c_{*2}\,c_{*3}\,c_{*4}\dots$$

finden, die in der Aufzählung nicht auftaucht, wenn wir

$c_{*k} = c_{kk}$ wählen für jedes $k \in \mathbb{N}$

Es kann also keine Abzählung dieser Form $(0,1) = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ geben. Damit ist $(0,1)$ nicht abzählbar und $\mathbb{R}$ erst recht nicht. $\square$

Definition: Zwei Mengen A, B heißen <u>gleichmächtig</u>, wenn eine bijektive Abbildung $f: A \to B$ existiert.

Man schreibt dann $|A| = |B|$

Es gilt also $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$ und $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

Satz: Sei A eine Menge und $P(A)$ ihre Potenzmenge (das ist die Menge aller Teilmengen von A), dann gilt $|A| \neq |P(A)|$