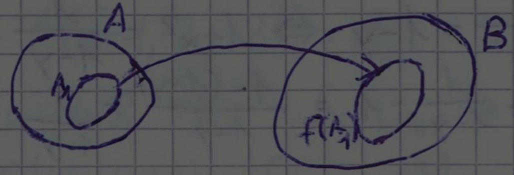
6. Bild und Urbild

Definition: Sei f eine Abbildung $f: A \to B$

und $A_1 \subseteq A$.

Dann heißt $f(A_1) := \{f(a) \mid a \in A_1\}$

das Bild (oder Bildmenge) von A_1 unter f.



Anmerkung: Auch $f(A)$ ist eine Bildmenge und es gilt

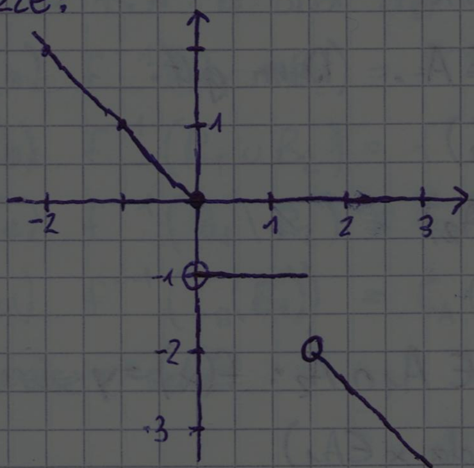
$$f(A) = B \Leftrightarrow f \text{ ist surjektiv}$$

Beispiele:

(1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$, $f(\mathbb{R}) = [-1; 1]$

(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} -x & \text{falls } x < 0 \\ -1 & \text{falls } x \in [0, \frac{3}{2}] \\ -\frac{1}{2} - x & \text{falls } x > \frac{3}{2} \end{cases}$

Skizze:



$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus [-2; 0[\cup \{-1\}$

(3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1 - \frac{1}{1+x^2}$

Behauptung: $f(\mathbb{R}) = [0; 1)$

Beweis: „$\subseteq$" Sei $x \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist, dass $f(x) \in [0; 1)$ gilt.

Es gilt $1 + x^2 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq 1$

Außerdem $\frac{1}{1-x^2} > 0$

Daraus folgt: $\cancel{0 < \frac{1}{1-x^2} \leq 1}$ $\quad 0 \leq 1 - \frac{1}{1+x^2} < 1$

(Anm. Keine Grenzwerte! Noch nicht eingeführt.)

Fortsetzung Beweis:

„$\supseteq$": Sei $y \in [0;1)$

Gesucht ist $x \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) = y$

Setze $1 - \frac{1}{1+x^2} = y$ und löse nach x auf.

Nebenrechnung:

$$1 - \frac{1}{1+x^2} = y \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} = 1-y \Leftrightarrow 1+x^2 = \frac{1}{1-y} \qquad 1-y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{1-y} - 1 = \frac{1-(1-y)}{1-y} = \frac{y}{1-y}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{y}{1-y}}$$

Wir haben sogar zwei „passende" $x \in \mathbb{R}$ gefunden:

$$f\left(\sqrt{\frac{y}{1-y}}\right) = y = f\left(-\sqrt{\frac{y}{1-y}}\right)$$

Hiermit gezeigt: $[0;1) \subseteq \mathbb{R}$

Insgesamt gilt also $f(\mathbb{R}) = [0;1)$ $\square$

Rechenregeln für Bildmengen.

Seien $f: A \to B$ und $A_1, A_2 \subseteq A$. Dann gilt:

(a) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

(b) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

Beweis von (a):

Sei $y \in f(A_1 \cap A_2) \Rightarrow \exists x \in A_1 \cap A_2 : f(x) = y$

$\Rightarrow y = f(x) \in f(A_1)$ (da $x \in A_1$)

und $y = f(x) \in f(A_2)$ (da $x \in A_2$)

$\Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ $\square$

Definition: Sei $f: A \to B$ und $B_1 \subseteq B$. Dann heißt

$f^{-1}(B_1) := \{x \in A \mid f(x) \in B_1\}$ das Urbild

Beispiele: (1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$

$f^{-1}([0;1]) = [-1,1]$, $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$

(2) $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+;\ x \mapsto x^2$

$f^{-1}([0,1]) = [0,1]$

$f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$

Achtung: $f^{-1}(1) = 1$ meint die Umkehrfunktion, nicht das Urbild!

(3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := x^2$

$f^{-1}(\{-1,-2,-3\}) = \emptyset$

(4) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad (x_1, x_2) \mapsto x_2$

$f^{-1}([-1,2]) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R} \wedge x_2 \in [-1,2]\}$

$= \mathbb{R} \times [-1,2]$

(5) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (Abstand zum Nullpunkt)

$f^{-1}(\{1\}) = \{(x_1, x_2) \mid f(x_1, x_2) = 1\}$

$= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1\}$ (Einheitskreis)

$f^{-1}([0;1)) = \ldots$ (Kreisfläche)

Rechenregeln für Urmengen:

Seien $f: A \to B$ und $B_1, B_2 \subseteq B$, dann gilt

(a) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

(b) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

(c) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

(d) $f^{-1}(C_B(B_1)) = C_A(f^{-1}(B_1))$

Beweise: selbst