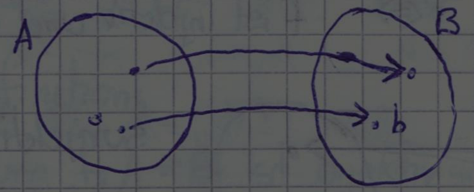
5. Abbildungen

Sei A, B Mengen. Unter einer Abbildung (oder Funktion) f von A in B verstehen wir eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zuordnet



Die Menge A heißt der Definitionsbereich und B heißt der Wertebereich von f.

Schreibweisen:

$$f: A \to B, \quad a \mapsto f(a)$$

$$f: \begin{cases} A \to B \\ a \to f(a) \end{cases}$$

Beispiele:

(1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2$

weitere Schreibweisen: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) := x^2$

(3) $f: \mathbb{R} \to [-1;1], \ f(x) := \sin(x)$

(3) f: Menge der Vorkursteilnehmer $\to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Teilnehmer $\to$ (Geburtsjahr, Schuhgröße)

injektiv
bijektiv
surjektiv

(4) Sei A eine Menge, $id_A: A \to A, \ a \mapsto a$ (Identität)

(5) $|\,|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto |x|$ (Betragsfunktion)

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

zu (1): $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2$

- nicht jedes $b \in \mathbb{R}$ wird „getroffen"
  z.B. gibt es kein $a \in \mathbb{R}$ mit $f(a) = -1$.

- verschiedene Elemente aus dem Definitionsbereich werden auf dasselbe Element im Wertebereich abgebildet.

  $f(2) \to 4, \quad f(-2) \to 4$

Definition: Sei $f: A \to B$ eine Abbildung

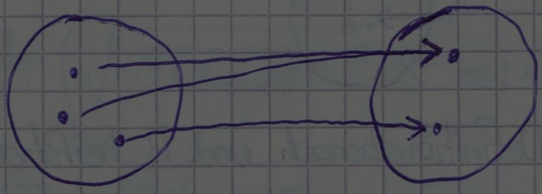
(1) f heißt <u>injektiv</u> $:\Leftrightarrow \forall a, a' \in A: \left(f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'\right)$

$\Leftrightarrow \forall a, a' \in A: \left(a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')\right)$

(2) f heißt surjektiv $:\Leftrightarrow \forall b \in B\ \exists a \in A: f(a) = b$

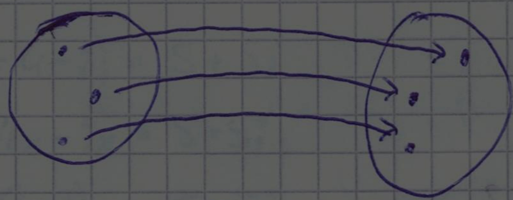
(3) f heißt bijektiv $:\Leftrightarrow$ f ist injektiv und surjektiv

$\forall a \in A\ \exists$



surjektiv
nicht injektiv

nicht surjektiv
injektiv



$\left.\begin{array}{l}\text{surjektiv}\\ \text{injektiv}\end{array}\right\}$ bijektiv

Anmerkung: $f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to x^2 \end{cases}$ nicht injektiv, nicht surjektiv

zur Abkürzung setze $\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$g: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \\ x \to x^2 \end{cases}$ nicht injektiv, jetzt aber surjektiv

$h: \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \\ x \to x^2 \end{cases}$ bijektiv

wichtig!

Definition: Seien $f: A \to B$ und $g: B \to C$ Abbildungen

Dann heißt $g \circ f: A \to C$, ~~$a \mapsto f(a) \mapsto g$~~

$a \mapsto g(f(a))$

die Verknüpfung oder Komposition von f und g.

Beispiel:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ , \; f(x) := x^2$

$g: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} , \; g(y) := \frac{1}{1+y}$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \frac{1}{1+x^2}$

Satz und Definition:

Eine Abbildung $f: A \to B$ ist bijektiv genau dann, wenn eine Abbildung $g: B \to A$ existiert mit der Eigenschaft $g \circ f = id_A$ und $f \circ g = id_B$

In diesem Fall ist g eindeutig bestimmt und heißt Umkehrabbildung von f. $\boxed{\text{Schreibweise: } f^{-1} := g}$

Beweis: (1. Semester)

Beispiel:

(1) Sei A eine Menge. $id_A: A \to A, \; a \mapsto a$ ist bijektiv und $id_A^{-1} = id_A$

(2) $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \; x \mapsto x^2$ ist bijektiv

$f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \; y \mapsto \sqrt{y}$

Umkehrabbildung: $g: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \; g(y) := \sqrt{y}$

(3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x^3$ ist bijektiv

$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$

---

(4) $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \; f(x) := -x^2 + 2x \quad \underbrace{= -(x-2)x}_{\text{nicht injektiv}}$

Nebenrechnung: $y = -x^2 + 2x$

↳ keine Abbildung!

(5) $f: \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^-, \; f(x) := -x^2 + 2x$ Setze $\mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Nebenrechnung: $y = -x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = -y + 1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 - y \Leftrightarrow x - 1 = \cancel{\pm\sqrt{y-1}} \pm\sqrt{1-y}$

$\Leftrightarrow x = \underbrace{1 \pm \sqrt{1-y}}_{<0}$

Vermutung: $g(y) = 1 - \sqrt{1-y}$

Setze $g: \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^-$, $g(y) := 1-\sqrt{1-y}$

$g(f(x)) = x \qquad f(g(y)) = y \quad ?$

(6) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{3} & \text{falls } n \text{ durch } 3 \text{ teilbar ist} \\ 3n+1 & \text{sonst} \end{cases}$

f ist surjektiv, denn zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = k$, nämlich $n = 3k$

f ist nicht injektiv, denn $f(1) = 4$ und $f(12) = 4$