4. Komplexe Zahlen

- historische Entwicklung

Gesucht sind Lösungen der Gleichung $x^3 = ax + b$

(mit gegebenen $a, b \in \mathbb{R}$

Bereits im 16. Jahrhundert war bekannt, dass

$$\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} \qquad (*)$$

eine Lösung ist - sofern dies überhaupt existiert.

Beispiel:

$x^3 = 15x + 4 \qquad (a = 15, b = 4)$

Wenn wir es mit $(*)$ versuchen, erhalten wir

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 4 - 125$$

also eine negative Zahl unter der Wurzel!

Aber: Man findet leicht heraus, dass

$x = 4$ eine Lösung ist.

Versuch: Nimm zu den reellen Zahlen eine imaginäre Zahl i hinzu und setze: $i^2 := -1$

Um damit rechnen zu können, wollen wir auch Vielfache dieser Zahl erklären und sie auch zu reellen Zahlen addieren können, usw.

Definition:

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

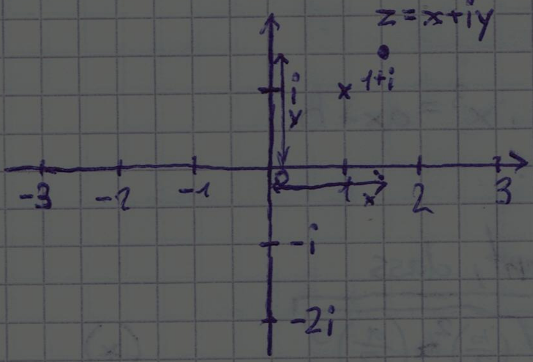
Wir erklären Addition und Multiplikation wie folgt.

$$(x + iy) + (u + iv) := (x + u) + i(y + v)$$

$$(x + iy) \cdot (u + iv) := xu + xiv + uiy + i^2 yv$$

$$= (xu - yv) + i(xv + uy)$$

Üblicherweise stellt man komplexe Zahlen graphisch als Ebene dar.



Ist $z = x + iy \in \mathbb{C}$, so heißt

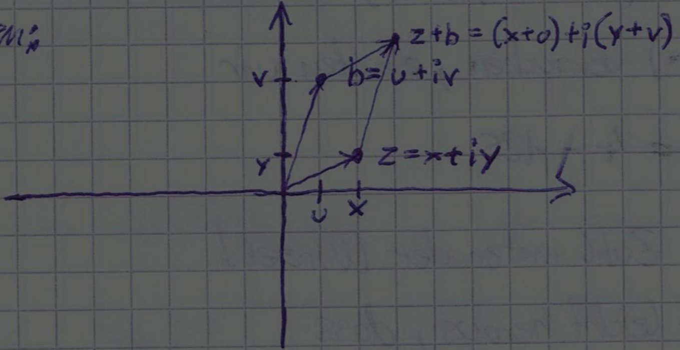
$\operatorname{Re} z := x$ der Realteil von z

$\operatorname{Im} z := y$ der Imaginärteil von z

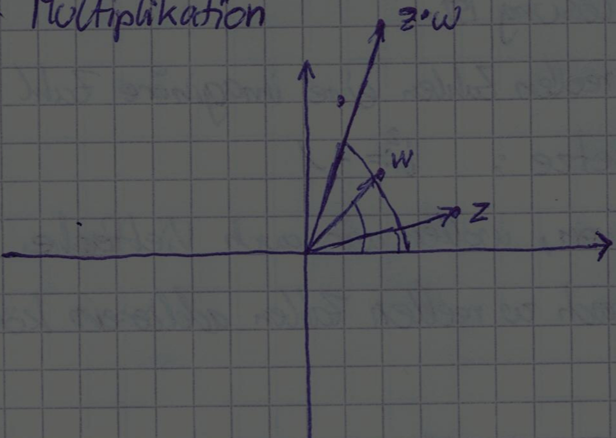
Wir können die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen

$$\mathbb{R} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0 \}$$

Graphisch können wir die Addition komplexer Zahlen wie folgt darstellen:



Bei der Multiplikation



Winkel addieren

Beträge multiplizieren!

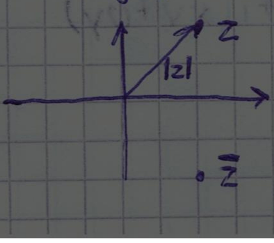
Weitere Definitionen:

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

Dann heißt $\bar{z} := x - iy$, die zu z konjungierte Zahl.

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$, der Betrag von z

↳ graphisch: Abstand zwischen Zahl und Nullpunkt.



$|z| := \sqrt{x^2+y^2}$

Für reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}$:

$$z = x + i \cdot 0$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Rechenregeln: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

(a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(b) $|zw| = |z| \cdot |w|$

(c) $|z+w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)

(d) $||z| - |w|| \leq |z+w|$

(e) $\overline{1} = 1$, $\overline{i} = -i$

(f) $|i| = 1$

Beweis: $\rightarrow$ Übung

Weitere Beispiele:

(1) $$\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i} = \frac{(1+2i)5i + (2-i)(3-4i)}{(3-4i)5i}$$

$$= \frac{5i - 10 + 6 - 3i - 8i + -4}{(3-4i)5i}$$

$$= \frac{-8-6i}{(3-4i)5i} = \frac{-2i(-4i+3}{(3-4i)5i} = \frac{-2}{5}$$

(2) $$\frac{2-3i}{5+6i} = \frac{(2-3i)(5+6i)}{(5+6i)(5-6i)} = \frac{-8-27i}{25+36}$$

$$= -\frac{8}{61} - i\frac{27}{61}$$

Existenz von Wurzeln:

Suche $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = i$ $(\sin 45^\circ + \sin 45^\circ i)$

Zu jeder komplexen Zahl $w \in \mathbb{C}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right)$

$w \neq 0$ und jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau n verschiedene ~~Wurzeln~~ komplexe Zahlen, die die Gleichung $z^n = w$ lösen.

Der Fundamentalsatz der Algebra:

Der Fundamentalsatz der Algebra:

Die Gleichung $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0 \qquad (**)$

mit gegebenen $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

besitzt in $\mathbb{C}$ mindestens eine Lösung und es gilt

$$a_0 + \cdots + a_n z^n = a_n (z - w_1)(z - w_2) \cdots (z - w_n)$$

wobei $w_1, \ldots, w_n$ genau die Lösungen von $(**)$ sind.