3. Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Wir betrachten die folgenden Mengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

Die Menge der rationalen Zahlen ist jedoch nicht umfassend genug.

Es gibt z.B. kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Offensichtlich gilt: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ (Anm. Im Vorkurs keine abstrakte Konstruktion)

Spezielle Teilmengen reeller Zahlen:

Intervalle: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$[a, b] \underset{\uparrow \text{Definition}}{:=} \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (oft $]a, b[$)

$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$(-\infty; b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

Definition (Potenzen)

Für $a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ setzen wir

(a) $a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots}_{n\text{-Faktoren}}$

(b) $a^0 := 1$ [damit gilt: $a^n = a \cdot a^{n-1}$ auch für $n = 1$]

(c) falls $a \neq 0$: $a^{-n} := \left(\frac{1}{a}\right)^n$ [insbesonders $a^{-1} = \frac{1}{a}$]

(d) falls $a \geq 0$: $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$

(e) falls $a \geq 0$: $a^{\frac{m}{n}} := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Anm.: Was ist a^x, wenn $x \in \cancel{\mathbb{Q}}\,\mathbb{R}$ → 1. Semester

Schreibweisen:

Für $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ schreibt man

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

Für $\sum_{i=1}^{0} a_i = 0$ $(n=0)$ $\qquad \prod_{i=1}^{0} a_i = 1$

„leere Summe" $\qquad$ „Leeres Produkt"

Warum? $\sum_{i=1}^{n} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$$\sum_{i=1}^{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{(n+1)} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1}$$

Beispiele:

(1) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = \sum_{i=1}^{100} i$

(2) $\sum_{k=1}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

(3) $\sum_{i=1}^{10} 1 = 10 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$

Die natürlichen Zahlen haben einige „schöne" Eigenschaften:

„Jede solche natürliche Zahl hat einen Nachfolger"

$n + 1 \in \mathbb{N}$

„Es gibt eine kleinste natürliche Zahl" $\rightarrow 1$

Darauf beruht das Beweisprinzip der sogenannten vollständigen Induktion.

Seien $A(1), A(2), A(3), A(\dots)$ Aussagen

[Beispiel: $A(n)$ lautet $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} n (n+1)$]

Wenn wir begründen können:

- $A(1)$ ist wahr („Induktionsanfang")
- Falls irgendein $A(n)$ wahr ist, so folgt daraus, dass auch $A(n+1)$ wahr ist. („Induktionsschritt")

dann ist $A(n)$ wahr für jedes n.

Beispiel: $A(n)$ lautet $1+2+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

- $A(1)$ ist wahr $\left(1 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\right)$
- Wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $A(n)$ wahr ist, dann folgt

$$\boxed{1+2+3+\dots+n} + (n+1) = \boxed{\frac{1}{2}n(n+1)} + (n+1)$$
$$= (n+1)\left(\frac{1}{2}n+1\right) = (n+1)\left(\frac{1}{2}(n+2)\right)$$
$$= \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \leftarrow \underline{A(n+1)!} \qquad \square$$

Weiteres Beispiel: Die Bernoulli-Ungleichung

Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$

Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}: (1+x)^n \geq 1+nx$

Beweis:

- Für $n=1$ ist die Aussage wahr
- Induktionsschritt: $n \mapsto n+1$

Es gelte $(1+x)^n \geq 1+nx$ für $n \in \mathbb{N}$

Dann folgt $(1+x)^{n+1} = \boxed{(1+x)^n}\underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \geq \boxed{(1+nx)}(1+x)$

$$= 1+nx+x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+nx+x = \underbrace{1+(n+1)x}_{A(n+1)} \qquad \square$$

Anm.: Jede Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element

Weiteres Beispiel: Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n > n^2$

für $n \geq 5$? → Beweis mit vollständiger Induktion,
Induktionsanfang mit $n=5$

Weitere Eigenschaft von $\mathbb{N}$:

„Die natürlichen Zahlen werden beliebig groß."

Genauer: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}: n \geq x$ (Prinzip des Archimedes)

Folgerung: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < \varepsilon$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: n \geq \frac{1}{\varepsilon}+1 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: n > \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \varepsilon > \frac{1}{n}$