~~1. Logik~~ 2. Mengen

Unter einer Menge stellen wir uns ein „Objekt" vor, das gewisse „Elemente" enthält. (Anm.: keine präzise Definition)

Beispiele:

(1) $A = \{1, \sqrt{2}; \pi; -10^{-6}\}$

also $1 \in A$ $\quad$ $3 \notin A$

(2) $\mathbb{N} = \{1; 2, 3; 4, \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{R} =$ Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{C}$ Menge der komplexen Zahlen

(3) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 2\} = \{-1; 0; 1; 2\}$

(4) $\{x \in \mathbb{R} \mid 5x^2 - 4x + 2 = 0\}$ Lösungsmenge

(5) $\emptyset$ leere Menge

(6) $A = \{1; 2; \{1,2\}, \{\{\emptyset\}\}, \mathbb{N}\}$

Schreibweisen:

Seien A, B Mengen. Wir schreiben

- $A \subseteq B$ Teilmenge $\forall x \in A: x \in B$
- $A \nsubseteq B$ nicht Teilmenge $\exists x \in A: x \notin B$
- $A = B$ Äquivalenz $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- $A \subsetneq B$ echte Teilmenge $A \subseteq B \wedge A \neq B$

Anmerkung: auch gebräuchlich: $\subset$ statt $\subsetneq$

$\subset$ statt $\subseteq$

Beispiele: $A = \{1\}$, $B = \{1,2\}$, $C = \{1, 2, 3\}$, $D = \{1, 2, B\}$

Es gilt $A \subsetneq B \subsetneq C$, $2 \in B$, $2 \in C$, $B \in D$, $B \subsetneq D$

Wie beweist man $A \subseteq B$ oder $A = B$?

Beispiel:

(1) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -100\}$

Behauptung: $A \subseteq B$

Beweis: Sei $x \in A \Rightarrow x \geq 3 > -100 \Rightarrow x > -100 \Rightarrow x \in B$ $\square$

$\uparrow$ Beweisende

(2) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 4 \text{ und } x \geq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

Behauptung: $A = B$

Beweis: „$\subseteq$" Sei $x \in A \Rightarrow x^2 > 4 \wedge x \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4 > 0$

$\Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow x \in B$ $\square$

„$\supseteq$" Sei $x \in B \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x^2 > 4 \wedge x \geq 0 \Rightarrow x \in A$ $\square$

„Standardkonstruktionen": Seien A, B, M Mengen, $A \subseteq M$

- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ Vereinigungsmenge
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ Schnittmenge
- $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ Mengendifferenz
- $C_M(A) = M \setminus A$ mit $A \subseteq M$ Komplement von A in M
- $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ Kartesisches Produkt

Beispiele: $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $C = \{-2, 3, 4\}$,

$D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \text{ gerade}\}$

$A \cup C = \{-2, 1, 3, 4\}$, $C \cap D = \{-2, 4\}$

$A \cap D = \{\}$, $A \setminus C = \{1\}$

$C_B(A) = \{2, 5, 6\}$, $A \times C = \{(1, -2), (1, 3), (1, 4),$
$(3, -2), (3, 3), (3, 4)\}$

Definition: Zwei Mengen A, B heißen disjunkt wenn $A \cap B = \emptyset$

Lemma: (Rechenregeln für Mengen) Für allen Mengen $A, B, C \subseteq M$ gilt:

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(Distriktivgesetze)

(c) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (d) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ $X^c = C_M(X)$

Beweis: (a)

Für alle $x \in M$ gilt:

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$$ (Übung 1)

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$ $\square$

Sei A eine Menge. Behauptung: $\emptyset \subseteq A$

Beweis: Angenommen es gilt $\emptyset \nsubseteq A$

Dann müste es ein $x \in \emptyset$ mit $x \notin A$ geben.