9:15 Vorlesung -> 15:00 Übung

vorkurse.ma.tum.de mathe / garching

www.ph.tum.de/vorkurs

Physik: Beginn 8 Uhr / 6:24 $\frac{S3/02/06}{\cancel{S27/06}}$

---

1. Grundlagen aus der Logik

Mathematik baut auf Logik und Mengenlehre auf. (17.09)

Im Vorkus werden wir dies mit „gesundem Menschenverstand" behandeln.

Wenn ich ein mathematisches Problem gelöst habe, genügt es nicht zu behaupten „Dies ist die Lösung". Ich muss eine nachvollziehbare Lösung Begründung liefern, dass dies auch tatsächlich eine Lösung ist.

Unter einer Aussage stellen wir ~~u~~ einen feststellenden Satz vor, dem sich eindeutig einer der beiden „Wahrheitswerte" wahr oder falsch zuordnen lässt. (Anm.: Keine präzise Definition, aber genügend)

Beispiel:

(1) Die Zahl 6 ist durch 3 teilbar. (wahre Aussage)

(2) $\sqrt{5} > 3$ (falsche Aussage)

(3) Denk nach! (keine Aussage)

Verknüpfung von Aussagen:

Häufig ist es sinnvoll/nötig mehrere Aussagen zu komplexen Aussagen zu verknüpfen.

Seien A, B Aussagen, dann sind auch

- nicht A (Schreibweise: $\neg A$)
- A und B (Schreibweise: $A \wedge B$)
- A oder B (Schreibweise: $A \vee B$)
- $A \Rightarrow B$ (sprich „wenn A, dann B" / Implikation)
- $A \Leftrightarrow B$ (sprich „genau dann A, wenn B" / Äquivalenz)

Aussagen.

Was damit gemeint ist, erklären wir mittels einer sogenannten Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	f	w	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	f	w	w	w	f
f	f	f	f	w	w	w

Beispiele:

(1) A: „n ist eine gerade Zahl"
B: „n ist eine Primzahl"
$(A \wedge B) \Leftrightarrow n = 2$ (wahre Aussage)

(2) Wenn es über der Boltzmannstraße regnet, dann wird die Boltzmannstraße nass. (wahre Aussage)

(3) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x > 2 \Leftrightarrow x^2 > 4$ (falsche Aussage)

(4) Wenn eine Katze ein Pferd wäre, könnten wir die Bäume hinaufreiten. (Heiner Geißler) (wahre Aussage)
falsche Aussage

(5) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$ (wahre Aussage)

Bemerkung: • Wenn A falsch ist, dann ist $A \Rightarrow B$ immer wahr.
[andernfalls würde der Wahrheitswert von (5) von x abhängen]

- $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$$

und auch zu $(\neg A) \vee B$

- $A \Leftrightarrow B$ ist äquivalent zu $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Wenn man eine Aussage der Form $A \Leftrightarrow B$ beweisen möchte, kann man (oftmals einfacher) zunächst $A \Rightarrow B$ und dann $B \Rightarrow A$ beweisen.

Quantoren

Mit diesen lassen sich Existenzaussagen kurz aufschreiben.

$\forall$ bedeutet „für alle"

$\exists$ bedeutet „es existiert"

Beispiele:

Die Aussage „Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine natürliche Zahl n mit $n \geq x$."

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}: n \geq x}$ (wahre Aussage)

Achtung!

Die Reihenfolge ist wichtig!

$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}: n \geq x$ (falsche Aussage)

Die Aussage (5) können wir damit als

$\forall x \in \mathbb{R}: x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$ schreiben

Verneinung von Aussagen:

- Angenommen jemand bezweifelt die Aussage $A: \forall n \in \mathbb{N}: n \geq 1$

Dann müsste $\neg A$ wahr sein. Was ist $\neg A$?

$$\neg A \Leftrightarrow \neg(\forall n \in \mathbb{N}: n \geq 1) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \neg(n \geq 1)$$
$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}: n < 1$$

- Sei $A: \exists x \in \mathbb{R}: x + 5 = 7$

$\neg A: \forall x \in \mathbb{R}: x + 5 \neq 7$